DE PRINCIPIIS, QUIBUS CALCULUS IMAGINARIUS NITITUR.

DISSERTATIO

QUAM AUCTORITATE

AMPLISSIMI PHILOSOPHORUM ORDINIS

PRO SUMMIS

IN PHILOSOPHIA HONORIBUS

RITE OBTINENDIS

DIE XIII. JULII ANNI MDCCCXLIV.

PUBLICE DEFENDET

AUCTOR

HENRICUS HERMANUS FINGER,

SUIDNICIENSIS.

CONTRA DISPUTABUNT:

RICH. GROSSMANN, PHIL. STUD.

ROB. WEISS, PHIL. STUD.

JOH. MINGS, PHIL. DR.

VRATISLAVIAE,

TYPIS GRASSII, BARTHII ET SOCII.

VIRO ILLUSTRISSIMO

H. A. BRETTNER,

Dr. PHIL. PROF. REG.

A CONSILIIS REGIMINIS SCHOLASTICIS POSNANIENSIS

SOCIETATIS SILESIACAE PATRIAE CULTURAE SODALI ETC.

PRAECEPTORI,

QUI MIHI QUONDAM FUIT, DILECTISSIMO,

FAUTORI DE ME EGREGIE MERITO

HAS STUDIORUM PRIMITIAS PIO GRATOQUE
ANIMO

D. D. D.

AUCTOR.

Formulae imaginariae, quamvis ex longo tempore notae, tamen nonnisi ex medio seculo praeterito ad calculum adhiberi coeptae sunt. — Occurrebant illae formulae mathematicis primum in radicibus imaginariis aequationum, in quibus accurata consideratione non dignae existimabantur, quod aequationum natura generalis mathematicis nondum satis liquebat. Mathematici seculorum XVI et XVII radices imaginarias nullas vocabant; nam in aequatione aliqua solvenda id tantum elaborabant, ut valorem quendam certum, qui problemati speciali conveniret, eruerent. Radices imaginariae, quum talem valorem non praeberent, hac de caussa nullae dicebantur, similique ratione negativae radices falsae, quod valorem realem quidem exhiberent, sed oppositum ei, qui pro natura problematis postularetur.

Neque id nimis exprobrandum esse videtur illis mathematicis. Deerat enim illo tempore vera quantitatis notio ut continuo crescentis et decrescentis, qua sola aequationum natura explicari potest. — Seculo deinde praeterito, quum quantitates in universum ut variabiles considerarentur, atque, quomodo ex se invicem dependerent, disquireretur, tum aequationes ut functiones quantitatum quarundam variabilium plane aliis rationibus ac prius investigabantur. — Quo novo disquirendi genere nisus Cl. Gauss celeberrimum illud theorema demonstravit, omnem functionem totam rationalem n^{ti} gradus in n factores lineares discerpi posse, quorum forma in universum imaginaria esset. — Quo theoremate dilucide apparuit, formam imaginariam radicum aequationis cujuslibet esse genera-

liorum, realem vero ex illa deduci. — Ex eo tempore formulae imaginariae magis magisque in usum venerunt, et quanti momenti hodie in omnibus matheseos disciplinis sint, quis ignoret? —

Attamen nondum expositionem formularum imaginariarum perfectam dilucidamque in libris, qui de analysi sunt, invenimus, certe non eam, qua vera earum natura explicetur. — Cl. Cauchy in libro suo: „cours d'analyse" inter eas, quae adsunt, optimam proposuit calculi imaginarii expositionem, quam tamen imperfectam et mancam neque apto ordine conscriptam esse, negari non potest. — Deest enim ibi quaestio, quomodo formulae imaginariae oriantur, neque demonstratur ut e functionum consideratione deducendae sint. Tota deinde expositio principio illo summo caret, quo, calculum non minus recte institui formulis imaginariis quam realibus, explicetur.

Quas res in expositione calculi imaginarii summi momenti esse, quum existimemus, de illo calculo ita agere, ut facile videatur, quomodo differat a calculo reali et quid cum eo habeat commune, conati sumus, unde de recta ratione calculi imaginarii judicari poterit.

Atque eo consilio primum quomodo formulae imaginariae oriantur, deinde quae sit earum forma generalis atque natura disquirere proposuimus; quibus explicatis de ratione, qua calculus imaginarius instituatur, agemus.

PARS PRIMA.

Quae sit formularum imaginariarum origo.

Generalis quantitatum natura est commutatio continua, cui quum finis poni non possit, quantitas in infinitum crescit et decrescit. Simplicissima verum relatione duplex statui debet ratio, qua crescat vel decrescat quantitas, positiva et negativa, unde fit, ut quantitatem commutari dicamus $a\ o$ usque ad $+ \infty$, et opposita ratione $a\ o$ usque ad $- \infty$, quod ut multis verbis explicetur hic locus non est.

Analysi vero quantitates considerantur, ut ex se invicem pendeant. Quo sensu de quantitatibus sermo est, quae non dependent ab aliis, et quae dependent. Quae non dependent, naturam illam generalem, supra commemoratam, retinent; quae dependent, non minus quidem variabiles sunt, sed commutationes ipsarum aliis reguntur et circumscribuntur; vocantur tales quantitates functiones. Usitatissimae functiones sunt summa, differentia, productum, quotiens, potestas, quantitas radicalis, quantitas exponentialis, logarithmus, deinde trigonometricae functiones. — In prioribus quatuor functionibus duabus non minus quantitatibus regentibus cogitantur, qua de caussa functiones plurium variabilium nominantur; quae sequuntur quatuor ex uua quantitate variabili pendentes cogitari possunt; ejusdem generis sunt trigonometricae functiones.

Quatuor priorum functionum, quae nullius momenti in hac disquisitione sunt, non amplius rationem habebimus.

Functiones, quum non minus quantitates sint, denuo ut quantitates non dependentes considerari, aliaeque earum functiones cogitari possunt. Id quod revera in sim-

plicibus illis functionibus videmus. Binae functiones simplices sibi oppositae sunt, potestas et quantitas radicalis, quantitas exponentialis et logarithmus, in trigonometricis functionibus sinus et Arc sin, cos et Arc cos etc. Omnino functio non potest cogitari, cui alia non sit opposita, ita ut conditiones, quas subiit quantitas variabilis in altera functione, altera tollantur. Id quod ita fit, ut functio quaelibet denuo ut quantitas regens in aliam functionem intret eo modo, ut conditiones novae functionis plane oppositae sint conditionibus functionis primariae.

Qua ratione dicemus primarias functiones x^a, a^x, sin x, cos x, tg x, ctg x, sec x, cosec x, inversas vero, sive derivatas $\sqrt[a]{x}$, log x, Arc (sin $= x$), Arc (cos $= x$) etc.

In potestate x^a, x quantitas regens est; functio inversa ita oritur, ut, quum $x^a = z$ ponatur, z ut nova quantitas contrarias conditiones subeat, $\sqrt[a]{z}$, qua nova functione efficitur, ut primariam quantitatem x denuo producamus. — Eodem modo binae aliae functiones se habent.

Quae binarum functionum comparatio magni momenti est, ubi de valoribus functionum quaeritur, qui valoribus quibuslibet quantitatis regentis respondeant.

Primum valores functionum, quas primarias diximus, disquiremus.

Functio x^a quodammodo circumscripta videtur, quum a numerus par sit, $= 2\alpha$; nam quum x omnes deinceps valores positivos et negativos induit, $x^{2\alpha} = z$ positiva manet, quo spatium variationum hujus functionis dimidio minutum est.

Functio $a^x = z$ non nisi positiva potest cogitari; valores ejus igitur iisdem finibus inclusi sunt, ut valores functionis $x^{2\alpha}$.

Quae duae functiones, quum ut quantitates variabiles in functiones inversas intrent, $\sqrt[2\alpha]{z}$, log z, pro natura

sua fines positivi transgredi non posse videntur. Sed hae functiones $\sqrt[2\alpha]{z}$, log z quamvis primum ut inversae cogitentur, tamen multo generaliores sunt; z in iis non amplius naturam functionis habet, sed ut quantitas independens consideranda est. — Qua de caussa quantitati z omnes valores inter $+\infty$ et $-\infty$ tribuendos esse censemus. — Verum quum z negativum fiat, tum functiones $\sqrt[2\alpha]{-z}$, log $(-z)$ forma affici necesse est tali, qua non respondere valorem functionis valori quantitatis regentis significetur; quae forma imaginaria est. $\sqrt[2\alpha]{-z}$, log $(-z)$ expressiones non amplius quantitates sunt, quod rem non existentem significent, sed ad complendos illarum functionum valores, quibus in spatio quodam reales valores absint, signa illa eodem modo ut signa realium quantitatum in calculo retinentur. Quo modo hoc accuratius probetur, infra videbimus.

Trigonometricarum deinde functionum nonnullae paene ejusdem naturae sunt. Functio sin $x = z$ non nisi valores habet, qui neglecto signo $\pm$ unitate minores sunt, quamvis x quantitas variabilis positive vel negative *a o* usque ad ∞ crescat. Itaque quum z ut quantitas regens in novam functionem inversam Arc (sin $= x$) $= z$ intret et valores, qui ± 1 transgrediantur, induat, functio Arc (sin $= x$) $= z$ imaginaria fit. — Ejusdem generis sunt functiones cos x et Arc (cos $= z$).

Functio tg $x = z$ non ita circumscripta est, nam periodice crescit decrescitve *a o*.... $\pm \infty$, qua de caussa Arc (tg $= x$) $= z$ nunquam imaginaria fit.

Functionibus sec x, cosec x suppleri videntur valores functionum sin x et cos x; nam sec x et cosec x non habent valores < 1, neglecto signo $\pm$, qua ratione functiones inversae Arc (sec $= z$), Arc (cosec $= z$), valoribus $z < \pm 1$ substitutis, imaginariae fiunt intra eosdem fines valorum quantitatis regentis, intra quos Arc (sin $= z$), Arc (cos $= z$), functiones reales sunt.

Disquisitione, quae praecedit, inter functiones simplices usitatas sub quibusdam conditionibus sex imaginaria forma affici videmus, $\sqrt[2\alpha]{-z}$, $\log(-z)$, $\mathrm{Arc}\,(\sin = z > 1)$, $\mathrm{Arc}\,(\cos = z > 1)$, $\mathrm{Arc}\,(\sec = z < 1)$, $\mathrm{Arc}\,(\mathrm{cosec} = z < 1)$. Quarum functionum una tantum algebraica est, $\sqrt[2\alpha]{-z}$, eaque sola, longe simplissima, in calculo utimur, praesertim quum, quinque alteras formas imaginarias in priorem reduci, facile demonstrari possit.

Hac indagationis parte explicare conati sumus, qua ratione formulae imaginariae originem e functionum quarundam natura ducant. — Satis elucere videtur, imaginarios functionum valores non minus necessarios esse, quam reales, quod iis integritas functionis atque universitas ejus valorum, quam pro natura sua amisisse videatur, restituatur.

Nunc in eo sumus ut naturam imaginariorum illorum valorum accuratius perscrutemur.

PARS ALTERA.

De forma atque natura expressionis symbolicae $x + yi$.

Jam dictum est, valores imaginarios functionum $\sqrt[2\alpha]{-x}$, $\log(-x)$, $\mathrm{Arc}\,(\sin = x > 1)$, etc. non amplius quantitates quidem esse, eamque ob caussam non variabiles dici eo sensu, quo fere variabilitas quantitatum statuitur, attamen quum x quantitatem regentem ne in his quidem imaginariis functionibus variabilitatem amisisse liqueat, certe de valoribus correspondentibus sermo esse potest. —

Quod ut accuratius explicetur, primam illarum functionum, $\sqrt[2\alpha]{-x}$ quodammodo transformaturi sumus, iterum commemorantes alteras functiones hac priore exprimi posse.

Notum est, $\sqrt[2\alpha]{-x} = \sqrt[2]{\sqrt[\alpha]{-x}}$, in qua formula ut $\sqrt[\alpha]{-x}$ quantitas realis sit, α impar esse statuimus; deinde pro $\sqrt[\alpha]{-x}$ ullam quantitatem negativam substitui posse satis liquet; itaque $\sqrt[2\alpha]{-x}$ in simpliciorem formam $\sqrt{-y}$ reducta est. — $\sqrt{-y}$ ita commutari potest, ut $= \sqrt{y}.\sqrt{-1}$ sit, ubi $\sqrt{y}$ ullam quantitatem realem $= z$ exhibeat; denique $z\sqrt{-1}$ simplicissima forma imaginaria est, qua in posterum utemur.

Qua expressione $z\sqrt{-1}$ notio imaginariae formulae melius explicatur. Videmus z quemcunque valorem realem, positivum vel negativum habere posse; factore $\sqrt{-1}$, quem in futurum $= i$ ponemus, addito, hunc valorem esse imaginarium significatur, sive talem, qualem functionum quarundam esse proprium supra demonstravimus.

Itaque quum quantitati cuilibet y factor i apponatur, y naturam suam quantitatis ut continuo crescentis vel decrescentis non omittit, nominamus vero omnes valores yi imaginarios.

Compositione signi alicucujus, quo realis quantitas exprimitur, x, et signi, quo imaginarii valores exhibentur yi, $x + yi$ symbolica oritur formula, qua omnes valores, qui quantitatis proprii sunt, exhibeantur; nam $y = o$ ponas, x signum realis quantitatis est. Unde facile intelligitur imaginariam formam quantitatum esse generalem, realem vero specialem, quod ex illa deducatur.

In universum de expressione $x + yi$ haec commemoranda sunt. Toti formulae eandem proprietatem tribuimus, quam singulae quantitases x et y una habent. —

Itaque quamdiu x et y variant, $x+yi$ expressionem nominamus variabilem; quum x et y certis finibus appropinquant, X et Y, $x+yi$ fini $X+Yi$ appropinquare dicimus. Quum x et y constantes habeant valores, a, b, $a+bi$ expressio constans imaginaria est. — Deinde $x+yi$ non evanescere potest, nisi vuum x et y singulae quantitates evanescant. — Aequatio $x+yi=o$ itaque has duas singulas aequationes $x=o$, $y=o$ continet.

Quum inter duas formulas imaginarias aequatio existat $x+yi=x'+y'i$, vides aequationem ita transformari posse $x-x'=(y'-y)i$, ubi in parte laeva quantitas realis, in dextera vero forma imaginaria inveniatur; talem aequationem non sensum habere, nisi quum utraque pars $=o$ ponatur, facile videas, unde sequitur $x-x'=o$, $y'-y=o$, vel $x=x'$, $y=y'$. — Aequationem igitur formae $x+yi=x'+y'i$ duas singulas aequationes $x=x'$, $y=y'$ continere, neque aliter explicari posse, satis liquet; contra e duabus aequationibus $x=x'$, $y=y'$, unam componi posse $x+yi=x'+y'i$ non minus patet. Nominatur talis aequatio $x+yi=x'+y'i$ symbolica.

Hucusque in expressione imaginaria signis x et y symplicium quantitatum variabilium usi sumus; attamen, quod x et y in universum quantitates significentur, pro iis functiones quaslibet quotcunque variabilium substitui posse, non difficile est intellectu. Neque dubium esse potest, quin formula $\varphi(x)+i\psi(x)$, ubi $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ functiones ejusdem variabilis sunt, eadem ratione explicanda sit, qua formulam $x+yi$ interpretati simus. — Aequatio symbolica $\varphi(x)+i\psi(x)=\varphi'(x)+i\psi'(x)$ discerpi potest in singulas $\varphi(x)=\varphi'(x)$, $\psi(x)=\psi'(x)$, quibus contra symbolica denuo componatur.

Formam singularem aequationum $\varphi(x)=\varphi'(x)$, $\psi(x)=\psi'(x)$ nullius momenti esse videmus; fieri potest, ut $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ seriebus infinitis repraesententur, $\varphi'(x)$ et $\psi'(x)$ vero expressiones finitae formae sint, quarum evolutio illis seriebus exhibeatur.

Quomodo transitus fiat a formulis imaginariis ad reales, vel quomodo ex aequationibus imaginariis reales deducantur valores, satis exposuisse videamur, atque hoc quoque elucebit, quum inter functiones, quae formulas imaginarias continent, aequatio existat, in qua termini reales et imaginarii nondum discerpti sint, non prius ex ea aequatione valores reales deduci posse, quam ita disposita sit, ut formam propositam $\varphi(x) + i\psi(x)$ habeat. — Eo spectat omnis calculus, qui imaginariis formulis instituitur.

PARS TERTIA.

Qua ratione formulis imaginariis in calculo utamur.

Prima hujus disquisitionis parte functionum simplicium valores indagavimus, qui realibus valoribus quantitatis independentis respondeant. Quo facto altera parte formam generalem quantitatis proposuimus, eam, quae et reales et imaginarios valores exhiberet. — Hac vero parte disquirendum nobis esse videtur, quomodo functionum valores explicandi sunt, quum quantitas regens sub illa forma imaginaria in calculum intret.

Plane aliud disquisitionis genus hoc esse et differens ab eo, quod supra fuit, facile intelligitur. — Non enim quaestio potest esse ea, qui valores functionis respondeant quibuscunque valoribus quantitatis independentis, neque de crescendo vel decrescendo functionis sermo esse potest.

Disquisitio solummodo eo spectat, an functio quaelibet, in qua valores imaginarii quantitati independenti tribuantur, in eam formam redigi possit, ut reales inde valores deducantur. — Quomodo transitus fiat ab imaginaria forma ad realem ex parte praecedente elucere vi-

detur. Aequatio quaelibet $f(x) = o$, ubi quantitati x valor imaginarius $\alpha + \beta i$ tribuitur, ita transformanda est, ut $f(x)$ in duas partes discerpatur, alteram realem, alteram imaginariam $\varphi(x) + i\,\psi(x)$, in qua formula signum i, a quantitate regente ad functionem translatum videatur. — Aequationem, quae inde oritur $\varphi(x) + i\psi(x) = o$, nonnisi compositionem duarum $\varphi(x) = o$, $\psi(x) = o$ esse, scimus.

Nunc in eo sumus, ut accuratius, quo spectet calculus imaginarius, explicemus. Substituitur in functionibus quibusdam pro signo quantitatis variabilis formula $\alpha + \beta i$, sive ulla alia ejusdem formae; id deinde elaborandum est, ut functio universa in eandem formam redigatur. Quo ut veniamus varias calculi species adhiberi necesse est, unde quaestio oritur summi momenti, utrum revera formulis imaginariis eodem modo liceat uti, quo signis realium quantitatum utamur, necne. Quod quum statutum erit, etiam effectus ejus calculi omnino rectos esse, facile videri poterit.

Reales quantitates signis quibusdam repraesentari scimus, quorum signorum secundum certas regulas, ex proprietate quantitatum deductas, conjunctio calculus est. — In calculo imaginario signum compositum $\alpha + \beta i$ existit, quo quantitas non repraesentatur. — Quamdiu hoc signum totum consideremus, regulas calculi vix inde deducamus. — Attamen quum singularum partium earumque compositionis rationem habeamus, jam scimus α et β significare quantitates reales; signa α et β igitur in calculo adhiberi possunt, ut quodlibet aliud signum quantitatis. β vero factore i affectum et; quomodo is accesserit, vel qua ratione e forma $\sqrt{-x}$ deducendus sit, supra demonstravimus. — βi nobis merum productum est, ad quod quicunque alii factores accedere possunt, quorum nonnulli vel omnes eodem modo compositi sint ut βi. Unde orietur simplici transformatione expressio formae $\beta.\,\gamma.\,\delta.\,\ldots\, i.\,i.\,i.\,\ldots = p i^m$; quaeritur an pro signo i^m simplicior forma substitui possit.

Revera, quamvis $i = \sqrt{-1}$ non quantitas sit, tamen quum hoc signum specie quadam calculi, vel functione quadam ortum sit, contraria specie conditiones tolli possunt, quibus $\sqrt{-1}$ imaginarium aliquid factum sit.

Itaque quum $\sqrt{-1}$ in potestatem parem elevetur $(\sqrt{-1})^{2n}$, hoc totum signum nihil imaginarii amplius significat, sed $(\sqrt{-1})^{2n} = (-1)^n$; deinde quum ad potestatem imparem elevatum sit $(\sqrt{-1})^{2n+1}$, scimus aequale esse $(\sqrt{-1})^{2n} \cdot \sqrt{-1} = (-1)^n \sqrt{-1}$. — Numero pari igitur factorum i imaginarium evanescere, impari retineri videmus.

Jam perspicuum est, de vera multiplicatione factorum plurium i sermonem esse non posse, certe non eo sensu, quo fere de multiplicandis quantitatibus verba faciamus. Conjunctio signorum β et i non explicari potest, nisi quum originis formae βi ratio habeatur. Secundum hanc originem, supra explicatam, i speciem factoris prae se fert, atque non minus partes factoris in calculo agit, ita ut de origine ejus non amplius in calculo cogitetur, hac sola proprietate constituta $i^{2m} = (-1)^m$, $i^{2m+1} = (-1)^m i$.

Postquam haec de compositione formulae $\alpha + \beta i$ diximus, $\alpha + \beta i$ nobis binomium erit sicut aliud ullum $\alpha + \beta x$, in quo x significationem habeat, quamcunque volumus. Regulas deinde usitati calculi realis quum ad formulas ejus generis adhibeamus, non amplius quaestio esse potest, an minus recti talis calculi effectus sint, sed de recta calculi ratione plane iisdem regulis judicamus, quibus in calculo reali utamur.

His praefatis ad singulas calculi species transeamus.

Quum formando sit summa quotcunque formularum $\alpha + \beta i$, $\alpha' + \beta' i$, $\alpha'' + \beta'' i$, ... scimus id elaborandum esse, ut nova expressio composita inde oriatur ejusdem formae $m + ni$. Additionem eodem modo significamus ut in calculo reali $(\alpha + \beta i) + (\alpha' + \beta' i) + (\alpha'' + \beta'' i) + \ldots$; facile colliguntur termini, qui non habent factorem i, $\alpha +$

$\alpha' + \alpha'' + \ldots$ quorum summam m nominamus; deinde termini factore i affecti $((\beta + \beta' + \beta'' + \ldots\ )i$, jam quae uncis inclusae sunt, quantitates esse videmus, quarum summa $= n$ ponatur, unde factum est ut $(\alpha + \beta i) + (\alpha' + \beta' i) + (\alpha'' + \beta'' i) + \ldots = m + ni$. Nominamus $m + ni$ summam illarum formularum, quamvis de vera summa, ut in quantitatibus addendis, sermo non possit esse. Est ea formula $m + ni$ nihil aliud nisi expressio abbreviata sed plane identica. Videmus deinde in addendis talibus formulis duas additiones singulatim existere, quam duplicem computationem in ceteris omnibus calculi speciebus animadvertemus. Quum in singulis expressionis $\alpha + \beta i$, $\alpha' + \beta' i$, ... etc. quantitates $\alpha = \alpha' = \alpha'' \ldots$ et $\beta = \beta' = \beta'' \ldots$ ponantur, unde $\alpha + \alpha' + \alpha'' + \ldots = \mu\alpha$, $\beta + \beta' + \beta'' + \ldots = \mu\beta$ sequatur, summa illarum formularum aequalis erit $\mu\alpha + \mu\beta i$ vel $= \mu(\alpha + \beta i)$, quae expressio significat, formulam $\alpha + \beta i$ μ^{ies} signo $+$ compositam fuisse.

Quum in formula $\alpha + \beta i$ β valorem quemcunque habere possit, pro $+\beta$ etiam $-\beta$ licebit scribere. Binae formulae ejusmodi ut tantum signo $+$ vel $-$ ante β inter se differant, $\alpha + \beta i$, $\alpha - \beta i$, expressiones imaginariae conjunctae nominantur. Quibus proprietas insignis est, ut in quibusdam calculi speciebus effectus reales praebeant. — Quod jam in additione videmus; nam quum ex regulis supra statutis summam formemus $(\alpha + \alpha) + (\beta - \beta)i$ videmus i multiplicatum esse per zerum, ideoque evanescere partem imaginariam expressionis, quae $= 2\alpha$ fit.

Differentia duarum formularum imaginariarum iisdem rationibus atque summa formatur. $(\alpha + \beta i) - (\alpha' + \beta' i) = (\alpha - \alpha') + (\beta - \beta')i$.

Productum expressionum $(\alpha + \beta i)(\alpha' + \beta' i) \ldots$ per analogiam binomiorum realium formabimus. Primum per factorem realem α' multiplicamus $(\alpha + \beta i)\alpha' = \alpha'\alpha + \alpha'\beta i$; addimus deinde $(\alpha + \beta i)$ eodem modo multiplicatum per factorem β', verum quum β' affectum sit i, toti producto hunc factorem damus $(\alpha + \beta i)\beta' i = (\alpha\beta' + \beta\beta' i)i = \alpha\beta' i$

$+\beta\beta' i^2$; terminus $\beta\beta' i^2$ quum bis habeat factorem i, transformatio supra commemorata $i^2 = -1$ se praebet, unde $\beta\beta' i^2 = -\beta\beta'$. Sequitur hinc $(\alpha + \beta i)(\alpha' + \beta' i) = \alpha'\alpha - \beta\beta' + \alpha'\beta i + \alpha\beta' i$, unde videmus in producto evoluto, duos terminos sine factore i, duosque factore i affectus esse, qui duo termini ita conjunguntur, ut uncis inclusis factor i apponatur $(\alpha\beta' + \alpha'\beta) i$. Nominamus deinde $(\alpha\alpha' - \beta\beta') + (\alpha'\beta + \alpha\beta') i$ productum formularum $(\alpha + \beta i)(\alpha' + \beta' i)$. Compositum est duabus partibus, altera reali $\alpha\alpha' - \beta\beta'$, altera imaginaria $(\alpha'\beta + \alpha\beta') i$.

Productum duabus plurimum formularum $(\alpha + \beta i)(\alpha' + \beta' i)(\alpha'' + \beta'' i) \ldots$ ita facile formatur ut binae conjungantur, unde novae formae $m + ni$ oriantur; quae conjunctio continuatur, donec solum duae formulae restent, quarum multiplicatione totum productum oriatur.

Multiplicatione duarum expressionam imaginariarum conjunctarum $(\alpha + \beta i)(\alpha - \beta i)$ realis formula oritur. Facile enim intelligitur $(\alpha + \beta i)(\alpha' - \beta i) = \alpha^2 + \beta^2$, qua formula utemur quum vel expressionem imaginariam tollere, vel summam duorum quadratorum in duos factores simplices discerpere velimus. Aequatione $(\alpha + \beta i)(\alpha - \beta i) = \alpha^2 + \beta^2$ intelligi potest, quanti momenti sint formulae imaginariae, atque quam vim habeant ad simplicitatem calculi. Summa enim duorum quadratorum non discerpi potest in duos factores lineares reales, sed tantum imaginarios. Itaque si formulae imaginariae abessent ad factores revera simplices expressionis $\alpha^2 + \beta^2$ descendere non possemus.

Fractio imaginaria $\frac{\alpha + \beta i}{\alpha' + \beta' i}$ ex analogia fractionis realis $\frac{\alpha}{\alpha'}$ eum sensum habet, ut inter formulas numeratoris et denominatoris ratio quaedam existat. Quam rationem in universum imaginariam esse facile intelligitur, ita ut $\alpha + \beta i = (m + ni)(\alpha' + \beta' i)$, quae aequatio revera sensum

habet, nam productum $(m+ni)(\alpha'+\beta' i)$ in formam $p+q$ redigi potest. Itaque in utraque parte aequationis $\alpha+\beta i = p+qi$ formulae ejusdem generis sunt, unde sequitur $\alpha = p$, $\beta = q$. n evanescere potest, qua re ratio formularum $\alpha+\beta i$ et $\alpha'+\beta' i$ realis fit.

Deinde elucet rationem illam $\dfrac{\alpha+\beta i}{\alpha'+\beta' i}$ non commutari, quum denominator atque numerator per eandem formulam imaginariam multiplicentur; aequatio erit plane identica

$$\frac{\alpha+\beta i}{\alpha'+\beta' i} = \frac{(\alpha+\beta i)(\alpha'-\beta' i)}{(\alpha'+\beta' i)(\alpha'-\beta' i} = \frac{\alpha\alpha'+\beta\beta'+(\alpha'\beta-\alpha\beta')i}{\alpha'^2+\beta'^2}$$

quae fractio in duas partes, alteram realem, alteram imaginariam dividi potest,

$$\text{ita ut: } \frac{\alpha+\beta i}{\alpha'+\beta' i} = \frac{\alpha\alpha'+\beta\beta'}{\alpha'^2+\beta'^2} + \frac{\alpha'\beta-\alpha\beta'}{\alpha'^2+\beta'^2}\cdot i$$

Potestas n^{ta} expressionis imaginariae, $(\alpha+\beta i)^n$ etiam in formam p+gi redigi posse, ex multiplicatione elucet; nam $(\alpha+\beta i)^n = (\alpha+\beta i)(\alpha+\beta i)\ldots . n^{ies}$, quod productum facile evolvitur. — Sed quum $\alpha+\beta i$ ut binomium consideramus n^{ta} potestas ex theoremate binomiorum deduci potest.

$$(\alpha+\beta i)^n = \alpha^n + n.\alpha^{n-1}\beta.i + \frac{n(n-1)}{1.2}\alpha^{n-2}\beta^2 i^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\alpha^{n-3}\beta^3 i^3 + \ldots\ldots$$

singulis potestatibus i^2, i^3,... transformatis, hanc seriem duabus compositam esse, alteram realem alteram imaginariam, facile videtur:

$$(\alpha+\beta i)^n = \alpha^n - \frac{n(n-1)}{1.\ 2}\alpha^{n-2}.\beta^2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}\alpha^{n-4}\beta^4 - \ldots.$$

$$+ i \left\{ \frac{n}{1}\alpha^{n-1}\beta - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3}\alpha^{n-3}\beta^3 + \ldots. \right.$$

Ex hac quoque formula elucet, $n^{t\,m}$ potestatem expressionis $\alpha+\beta i$ in formam $p+gi$ redigi posse, p et q vero seriebus expressas esse.

Jam quum exponens n numerus fractus est, $(\alpha+\beta i)^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{\alpha+\beta i}$, eodem modo licet in duas series evolvere expressionem, quae series infinitae erunt. Attamen quum his seriebus unus tantum valor m^{tae} radicis, quae tamen m habeat valores, repraesentetur, aliud devolvendi genus adhibendum est.

Quo ut veniamus, transformationem aliquam formularum imaginariarum commemoraturi sumus, quae, ex geometria petita, in simplicitatem calculi summam habeat vim.

In transmutatione coordinatarum linearium rectangularum in polares pro quantitatibus x et y substituuntur expressiones ϱ cos v, ϱ sin v. — Nam quum x linea abscissa, y ordinata puncti cujusdam sint, punctum illud cum origine coordinatarum conjungere licet, unde triangulus rectangulus oriatur, cujus cathetae x, y sint; hypotenusa quum ϱ nominetur et v angulus inter hypotenusam et cathetam x; ex trigonometriae theorematis elucet, duabus cathetis x, y hypotenusam ϱ et angulum v accurate definitum esse. Et enim $x = \varrho$ cos v, $y = \varrho$ sin v, quibus aequationibus omnes valores x et y, quantitate ϱ et functione trigonometrica anguli v exprimuntur.

Quae transformatio magno emolumento est. Nam quum coordinatae x et y varios situs ex origine coordinatarum habeant, unde una alterave vel ambae positivae

vel negativae fiant, ϱ semper quantitas positiva manet. In variationibus quantitatum x et y, ϱ circum originem coordinatarum ducitur; torsio vero vel in laevam vel in dextram partem fieri potest, quod differens genus torsionis angulo v exprimitur, quem positivum dicimus, quum ϱ in dexteram partem, negativum, quum in laevam torqueatur. Relationes igitur, quae inter x et y existunt, variique illarum linearum situs multo simplicius quantitate positiva ϱ et angulo v ejusque trigonometricis functionibus exhibentur.

Transformatio illa propter simplicitatem calculi trigonometrici multa commoda praebet, et, quod plane generalis est, in analysi eam adhibere licet. Nam quum x et y variabiles sint quantitates et $x = \varrho \cos v$, $y = \varrho \sin v$ ponatur, facile inde deducitur $x^2 + y^2 = \varrho^2$, vel $\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}$ unde ϱ semper realem quantitatem esse videmus. Jam respicientes geometriam ϱ tantum valorem positivum habere scimus.

Facile deinde deducuntur aequationes $\cos v = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ $\sin v = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, quae expressiones $\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ quum semper $\leqq 1$ sint, et summa quadratorum $= 1$, elucet realem arcum v inveniri posse, qui aequationi $x = \varrho \cos v$, $y = \varrho \sin v$ satisfaciat.

Itaque formula imaginaria $x + yi$ ita transformatur: $x + yi = \varrho\ (\cos v + i \sin v)$, ex qua aequatione secundum regulas, quas statuimus, $x = \varrho \cos v$, $y = \varrho \sin v$ sequitur. — Nominatur ϱ modulus, $\cos v + i \sin v$ expressio imaginaria reducta.

Hoc loco commemoranda esse videtur res summi momenti. Nam quum ex aequationibus $\cos v = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$,

$\sin v = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ Arcus v definiatur, $v = \text{Arc} \left(\cos = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$ vel $v = \text{Arc} \left(\sin = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$, notum est, infinitum valorum numerum arcus v deduci posse, quod innumeri diversi arcus eundem habeant sinum et cosinum, ita ut scribendum sit $v = \text{Arc}\left(\cos = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) + 2\,\varkappa\,\pi$. Expressiones igitur imaginariae nonnumquam magnum vel infinitum numerum valorum praebebunt, qui accurate respiciendi sunt.

Quas expressiones transformatas quum in calculum inducamus, ratio calculi imaginarii atque principia omnino non commutantur.

Ex aequatione $\varrho\,(\cos v + i \sin v) = \varrho'\,(\cos v' + i \sin v')$ eodem modo ut supra deducuntur hae:

$$\varrho \cos v = \varrho' \cos v' \,,\; \varrho \sin v = \varrho' \sin v'$$

quarum aequationum quadrata quum addantur, habemus:

$$\varrho^2\,(\cos^2 v + \sin^2 v) = \varrho'^2\,(\cos^2 v' + \sin^2 v')\,,$$

vel $\varrho^2 = \varrho'^2$, $\varrho = \varrho'$ quod modulum positivum statuimus. Jam videmus esse

$$\cos v = \cos v' \,,\; \sin v = \sin v' \,,$$ quae

duae aequationes una imaginaria expressae sunt

$\cos v + i \sin v = \cos v' + i \sin v'$, unde theorema illud deducitur, quum duae expressiones imaginariae aequales sint $\varrho\,(\cos v + i \sin v) = \varrho'\,(\cos v' + i \sin v')$, singulatim modulos $\varrho = \varrho'$ et expressiones reductas $\cos v + i \sin v = \cos v' + i \sin v'$ aequales esse. Deinde quum $\varrho\,(\cos v + i \sin v) = o$ ponatur, scimus

inde sequi has aequationes: $\varrho \cos v = o$, $\varrho \sin v = o$, quibus satisfieri non ambabus potest, nisi quum $\varrho = o$.

In singulis calculi speciebus id rursus elaborandum est, ut effectus calculi sub eadem forma se praebeant, qua singulae expressiones datae sint.

Itaque quum addendae sint formulae
$\varrho(\cos v + i \sin v) + \varrho'(\cos v' + i \sin v') + \varrho''(\cos v'' + i \sin v'') + \ldots$
summa formae esse debet: $r(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)$, ubi quantitates r et ϑ definitae sunt ϱ, ϱ', v', v quantitatibus. — Id quod fieri posse facile eo intelligitur, quod supra de additione diximus; nam quum expressiones simplices $(\alpha + \beta i) + (\alpha' + \beta' i) + \ldots$ addendae sint, summmma formam habet $m + ni$, quae formula, ut quaevis alia transformari potest in hanc: $r(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)$.

Plane eadem est subtractionis ratio, de qua nihil disseremus.

Praecipue in multiplicatione, quanto sint emolumento formulae transformatae, videmus. Hic enim admirabilem in modum calculus simplicior redditur. Formemus productum duarum formularum ex regulis supra constitutis:

$\varrho(\cos v + i \sin v) \,.\, \varrho'(\cos v' + i \sin v') =$

$\varrho\varrho' \{\cos v . \cos v' - \sin v . \sin v' + i(\cos v . \sin v' + \sin v . \cos v')\}$

$= \varrho\varrho' \{\cos(v + v') + i \sin(v + v')\}$; quae nova formula, quum denuo per aliam multiplicari possit, quin similis oritura sit, dubitari non potest, ita ut:

$\varrho(\cos v + i \sin v) \,.\, \varrho'(\cos v' + i \sin v') \,.\, \varrho''(\cos v'' + i \sin v'') \ldots$
$= \varrho . \varrho' . \varrho'' \{\cos(v + v' + v'' + \ldots) + i \sin(v + v' + v'' + \ldots)\}$

Hoc theorema a Moivre inventum, quin summi momenti sit, quis dubitet; nam simplici multiplicatione modulorum et additione arcuum, multiplicationes latae breviter efficiuntur.

Singulae formulae, quum aequales, numero n, sint, facile videtur $\{\varrho(\cos v + i \sin v)\}^n = \varrho^n(\cos n v + i \sin n v)$ esse.

Divisio duarum ejus generis formularum similem in modum expressionem praebet simplicem. Jam scimus fractionem imaginariam in formam $m+ni=r(\cos\vartheta+i\sin\vartheta)$ redigi posse. Ponamus igitur:

$$\frac{\varrho(\cos v+i\sin v)}{\varrho'(\cos v'+i\sin v')}=r(\cos\vartheta+i\sin\vartheta),$$ in qua expressione quantitates r, ϑ definiendae sunt quantitatibus ϱ, ϱ', v, v'. — Quum multiplicetur aequatio per denominatorem, ex theoremate praecedente sequitur:

$$\varrho(\cos v+i\sin v)=\varrho' r\{\cos(\vartheta+v')+i\sin(\vartheta+v')\}$$

vel $\varrho=\varrho' r$, $r=\frac{\varrho}{\varrho'}$

$\cos v=\cos(\vartheta+v')$, $\sin v=\sin(\vartheta+v')$

$v=\vartheta+v'+2\varkappa\pi$, $\vartheta=v'-v+2\varkappa\pi$, qui valores r, ϑ substituantur in aequationem

$$\frac{\varrho(\cos v+i\sin v)}{\varrho'(\cos v'+i\sin v')}=\frac{\varrho}{\varrho'}\{\cos v-v'+2\varkappa\pi)+i\sin(v-v'+2\varkappa\pi)\};$$

sed neque sinus neque cosinus commutatur, quum arcus numero quodam peripheriarum augeatur; ergo scribi potest:

$$\frac{\varrho(\cos v+i\sin v)}{\varrho'(\cos v'+i\sin v')}=\frac{\varrho}{\varrho'}\{\cos(v-v')+i\sin(v-v')\},$$

qua in expressione quum numerator

$\varrho(\cos v+i\sin v)=1$ ponatur, $\varrho=1$, $\cos v=1$, $\sin v=o$; $v=2\varkappa\pi$ sequitur, atque aequatio haec oritur:

$$\frac{1}{\varrho'(\cos v'+i\sin v')}=\frac{1}{\varrho'}\{\cos(2\varkappa\pi-v')+i\sin(2\varkappa\pi-v')\}$$

$$= \frac{1}{\varrho'} \{\cos v' - i \sin v'\}$$

Quam expressionom adhibentes $(-n)$ tam potestatem expressionis $\varrho\ (\cos v + i \sin v)$ evolvamus.

Est enim $\{\varrho\ (\cos v + i \sin v)\}^{-n} =$

$$= \frac{1}{\varrho^n\ (\cos n\, v + i \sin n\, v)} = \varrho^{-n}\ (\cos n\, v - i \sin n\, v)$$

Jam quum n sit numerus fractus $= \frac{1}{m}$ supra expressionis $(\alpha + \beta\, i)^{\frac{1}{m}}$ non omnes m valores devolvere potuimus; nunc vero sine ulla difficultate m illos valores exhibebimus.

$\{\varrho\ (\cos v + i \sin v)\}^{\frac{1}{m}}$ redigatur in formam $= r\ (\cos x + i \sin x)$, quae aequatio ad m^{tam} potestatem elevetur

$\varrho\ (\cos v + i \sin v) = r^m\ (\cos m x + i \sin m x)$, unde sequitur $\varrho = r^m$ vel $r = \sqrt[m]{\varrho} = \varrho^{\frac{1}{m}}$, $\cos v = \cos m\, x$, $\sin v = \sin m x$, $v = m\, x + 2\, \varkappa\, \pi$, $x = \frac{v + 2\, \varkappa\, \pi}{m}$, qui valores r et x substituantur in aequationem primariam

$$\{\varrho\ (\cos v + i \sin v)\}^{\frac{1}{m}} = \varrho^{\frac{1}{m}} \left\{\cos\frac{(v+2\varkappa\pi)}{m} + i \sin\frac{(v+2\varkappa\pi)}{m}\right\}$$

quae formula, quamvis $\varkappa$ omnes habeat valores $0,1,2,3....\infty$, tamen infinitum numerum valorum non praebet. Nam ii valores $\varkappa$, qui tantum factore $\mu.m$ differant, arcum quantitate $2\,\mu\pi$ augent, qua re functiones sinus et cosinus non commutentur. Id quod ita demonstrari potest: po-

nas esse $\varkappa$ et $\varkappa'$ duos valores $\varkappa$ ejus generis ut $\varkappa' = \varkappa + 2\mu m$, non exhibent $\varkappa$ et $\varkappa'$ differentes valores, quum in aequationem substituuntur, sed

$$\cos\left(\frac{v + 2\varkappa\pi}{m}\right) + i\sin\left(\frac{v + 2\varkappa\pi}{m}\right) =$$

$$\cos\left(\frac{v + 2\varkappa'\pi}{m}\right) + i\sin\left(\frac{v + 2\varkappa'\pi}{m}\right)$$ est; in parte

dextera ponatur pro $\varkappa' = \varkappa + \mu m$

$$\cos\left(\frac{v + 2\varkappa\pi + 2\mu m\pi}{m}\right) + i\sin\left(\frac{v + 2\varkappa\pi + 2\mu m\pi}{m}\right)$$

vel: $\cos\left(\frac{v + 2\varkappa\pi}{m} + 2\mu\pi\right) + i\sin\left(\frac{v + 2\varkappa\pi}{m} + 2\mu\pi\right)$,

quod quum $= \cos\left(\frac{v + 2\varkappa\pi}{m}\right) + i\sin\left(\frac{v + 2\varkappa\pi}{m}\right)$, videmus, aequationem propositam esse identicam. m^{ta} radix igitur non m plures habsre potest valores, qui e valoribus $\varkappa = o$, 1, 2, 3....$(m-1)$ deinceps deducuntur. Sed revera m valores ejus differentes sunt, omnes enim valores $\varkappa = o$, 1, 2, 3....$(m-1)$ differentes exhibent valores formulae $\cos\left(\frac{v + 2\varkappa\pi}{m}\right) + i\sin\left(\frac{v + 2\varkappa\pi}{m}\right)$. Ponas esse duos valores $\varkappa$, h et h' ambos $< m$, quibus differentes valores formulae imaginariae non responderent, ita ut aequatio esset $\cos\left(\frac{v + 2h\pi}{m}\right) + i\sin\left(\frac{v + 2h\pi}{m}\right) =$

$\cos\left(\frac{v + 2h'\pi}{m}\right) + i\sin\left(\frac{v + 2h'\pi}{m}\right)$, inde deduci potest

$$\cos\frac{v+2h\pi}{m}=\cos\frac{v+2k'\pi}{m}$$

$$\frac{v+2h\pi}{m}-\frac{v+2h'\pi}{m}=2\mu\pi$$

$$\frac{2h\pi}{m}-\frac{2h'\pi}{m}=2\mu\pi$$

$h-h'=\mu m$, quae tamen aequatio recta non potest esse, quod h et h' ambo $< m$ posita sunt. — Formulae

$$\cos\frac{v+2h\pi}{m}+i\sin\frac{v+2h\pi}{m},\ \cos\frac{v+2h'\pi}{m}+i\sin\frac{v+2h'\pi}{m}$$

differentes habent valores, unde expressionem

$\cos\frac{v+2\varkappa\pi}{m}+i\sin\frac{v+2\varkappa\pi}{m}$, qua m^{ta} radix formulae

$\cos v+i\sin v$ repraesentetur, revera m differentes praebere valores sequitur.

Post hanc disquisitionem functionum algebraicarum ad transcendentes, quae dicuntur, transeundum esse videtur. — Jam vidimus solummodo de forma functionum sermonem fuisse, ita ut omnes functiones, formula imaginaria pro quantitate regente substituta, in eandem formam redigeremus. Ad hanc transformationem nonnisi calculum algebraicum adhiberi necesse erat, quae res jam eo elucere videatur, quod compositio formae $\alpha+\beta i$ vel $\varrho(\cos\vartheta+i\sin\vartheta)$ omnino algebraica est. — Jam quum in functionibus transcendentibus pro quantitate determinante formula imaginaria substiuatur, transformatio non minus algebraica esse potest. — Ne hac mea verba false percipiantur, cupiam. — In transformatione harum functionum seriebus infinitis, in quas illae functiones evol-

vuntur, usuri sumus, praecipue seriem in quam a^x vel e^x evolvitur adhibebimus. — Singuli verum termini harum serierum, quae secundum potestates quantitatis determinantis progrediuntur, algebraice compositi sunt. Unde fit, ut, quum in signo functionis pro quantitate x formula $\alpha + \beta\, i$ substituatur, quod idem in serie fieri debeat, in singulis seriei terminis nonnisi transformationem algebraicam, quam praecedentibus docuimus, adhiberi necesse sit. — Facile deinde perspicitur, quum singulos talis seriei terminos in formam $m + n\, i$ reducere possimus, totam seriem in duas alias discerpi; alteram realem, alteram factore i affectam. — Jam in hac transformatione acquiescere possumus, dummodo has duas series convergere sciamus. Sed fere eveniet, ut singulae series, transformatione exortae, evolutiones quarundam aliarum functionum sint, quae functiones ipsae deinde pro seriebus substitui possint. Qua re fit, ut duae partes, in quas functio originalis, discerpta est, finita forma exhibeantur, id quod in calculo magno emolumento est.

In functione a^x, x ponatur $= \alpha + \beta i$, $a^{\alpha + \beta i} = a^\alpha \cdot a^{\beta i}$; quae sit significatio $a^{\beta i}$ serie explicatur. Scimus esse

$$a^z = 1 + \frac{z\, la}{1} + \frac{z^2 (la)^2}{1.2} + \frac{z^3 (la)^3}{1.2.3} + \ldots\ldots \infty,$$

in qua serie quum $z = \beta i$ substituatur, singuli termini, qui potestates impares continent, imaginarii fiunt, qui potestates pares, reales, ita ut series in duas alias discerpatur, alteram realem, alteram imaginariam

$$a^{\beta i} = 1 - \frac{\beta^2 (la)^2}{1.2} + \frac{\beta^4 (la)^4}{1.2.3.4} - \ldots\ldots$$

$$+ i \left\{ \frac{\beta\, la}{1} - \frac{\beta^3 (la)^3}{1.2.3} + \ldots\ldots \right.$$

quarum priore $\cos(\beta la)$, altera $\sin(\beta la)$ exprimitur; ergo

$$a^{\beta i} = \cos(\beta la) + i \sin(\beta la)$$

atque

$$a^{\alpha+\beta i} = a^{\alpha} \{\cos(\beta la), + \sin(\beta la,\};$$

qua in aequatione quum pro a substituatur e

$$e^{\alpha+\beta i} = e^{\alpha} \{\cos\beta + i \sin\beta\}.$$

Ex his formulis facile derivatur $\log(\alpha + \beta i)$; nam quum $a^{x+yi} = \alpha + \beta i$ ponatur

$x + yi = \log(\alpha + \beta i)$ sequitur, ubi x et y quantitatibus α et β exprimendae sunt.

$$a^{x+yi} = a^{x}(\cos[y\,la] + i \sin[y\,la]) = \alpha + \beta i$$

$$a^{x} \cos(y\,la) = \alpha,\ a^{x} \sin(y\,la) = \beta$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = a^{2x},\ 2x = \log(\alpha^2 + \beta^2)$$

$$x = \tfrac{1}{2} \log(\alpha^2 + \beta^2)$$

$$\frac{a^{x}\,.\,\sin(y\,la)}{a^{x}\ \cos(y\,la)} = \frac{\beta}{\alpha},\ \operatorname{tg}(y\,la) = \frac{\beta}{\alpha}$$

$y = \dfrac{1}{la} \operatorname{Arc}\left(\operatorname{tg} = \dfrac{\beta}{\alpha}\right)$, quos valores x et y in aequatione $x + yi = \log(\alpha + \beta i)$ quum substituerimus

$$\log(\alpha + \beta i) = \tfrac{1}{2}\log(\alpha^2 + \beta^2) + i\frac{1}{la}\operatorname{Arc}\left(\operatorname{tg} = \frac{\beta}{\alpha}\right)$$

sequitur, et quum ad logarithmos naturales transeamus

$$l(\alpha + \beta i) = \tfrac{1}{2} l(\alpha^2 + \beta^2) + i \operatorname{Arc}\left(\operatorname{tg} = \frac{\beta}{\alpha}\right),$$

quae expressiones tamen innumeros habent valores, quod arcus, quorum tangens $= \dfrac{\beta}{\alpha}$, innumeri sunt.

Ponamus $\beta = o$

$$\log \alpha = \log \alpha + i \frac{1}{la} \varkappa\pi$$

$l\alpha = l\alpha + i.\varkappa\pi$, ex qua expressione elucet, logarithmum innumeros habere valores, quorum tamen non nisi unus realis sit.

$$\cos(\alpha + \beta i) = \cos\alpha . \cos\beta i - \sin\alpha . \sin\beta i;$$

$\cos\beta i$ et $\sin\beta i$ expressiones derivantur, quum in seriebus

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - , \ldots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \ldots$$ pro x

substituatur βi

$$\cos\beta i = 1 + \frac{\beta^2}{1.2} + \frac{\beta^4}{1.2.3.4} + \ldots . = \frac{e^\beta + e^{-\beta}}{2}$$

$$\sin\beta i = i\left\{\frac{\beta}{1} + \frac{\beta^3}{1.3} + \frac{\beta^3}{1.3.5} + \ldots\right. = \frac{e^\beta - e^{-\beta}}{2} i$$

nam revera hae duae series pro formulis $\frac{e^\beta + e^{-\beta}}{2}$, $\frac{e^\beta - e^{-\beta}}{2}$ inveniuntur, quas expressinoes pro $\cos\beta i$ et $\sin\beta i$ in aequationem propositam substituimus

$$\cos(\alpha + \beta i) = \frac{e^\beta + e^{-\beta}}{2} \cos\alpha - i\frac{e^\beta - e^{-\beta}}{2} \sin\alpha$$

eodem modo devolvitur

$$\sin(\alpha + \beta i) = \frac{e^\beta + e^{-\beta}}{2} \sin\alpha + i\frac{e^\beta - e^{-\beta}}{2} \cos\alpha$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta i) = \frac{p . \sin\alpha + iq\cos\alpha}{p\cos\alpha - iq\sin\alpha}$$

$$\text{ubi } p = \frac{e^\beta + e^{-\beta}}{2}, \; q = \frac{e^\beta - e^{-\beta}}{2}$$

quae fractio imaginaria ex simplicibus regulis in duas partes dividi potest, ita ut:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta i) = \frac{\sin\alpha . \cos\alpha (p^2 - q^2)}{p^2 \cos^2\alpha + p^2 \sin^2\alpha} + i \frac{p q}{p^2 \cos^2\alpha + q^2 \sin^2\alpha}.$$

Functionum sec x, cosec x, quae facile praecedentibus exprimuntur, evolutionem hic praeterimus.

Functionos deinde considerandae sunt Arc $(\sin = x)$ Arc$(\cos = x)$, Arc$(\operatorname{tg} = x)$, Arc$(\operatorname{ctg} = x)$, Arc$(\sec = x)$ etc. quum $x = \alpha + \beta i$ ponatur; sed quod, Arc$(\sin = x)$ Arc$(\cos = x)$, Arc$(\sec = x)$, etc. functione Arc $(\operatorname{tg} = x)$ facile exprimi posse, notum est, hanc solam functionem Arc$(\operatorname{tg} = \alpha + \beta i)$ ita transformaturi sumus, ut Arc$(\operatorname{tg} = \alpha + \beta i) = x + yi$ fiat.

Ex aequatione Arc $(\operatorname{tg} = \alpha + \beta i) = x + yi$ sequitur $\operatorname{tg}(x + yi) = \alpha + \beta i$

$$\alpha + \beta i = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} yi}{1 - \operatorname{tg} x . \operatorname{tg} yi},$$ per denominatorem multiplicetur, et pro

$\operatorname{tg}\, yi$ valor $\dfrac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}}\, i$ substituatur:

$$\alpha + \beta i - i\alpha . \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} \operatorname{tg} x + \beta \operatorname{tg} x . \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} =$$

$$\operatorname{tg} x + \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}}\, i,$$ unde hae duae aequationes facile derivantur

$$\alpha + \beta \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} x$$

$$\beta - \alpha \operatorname{tg} x . \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}},$$ ex quibus quantitates x et y determinari possunt

$$x = \tfrac{1}{2} \operatorname{Arc} \left(\operatorname{tg} = \frac{2\alpha}{1 - \alpha^2 - \beta^2} \right)$$

$$y = \tfrac{1}{4} l \left(\frac{\alpha^2 + \beta^2 + 2\beta + 1}{\alpha^2 + \beta^2 - 2\beta + 1} \right)$$

qui valores x et y quum in aequationem Arc ($\operatorname{tg} = \alpha + \beta i) = x + yi$ substituantur, videmus Arc$(\operatorname{tg} = \alpha + \beta i)$

$$= \tfrac{1}{2} \operatorname{Arc} \left(\operatorname{tg} = \frac{2\alpha}{1 - \alpha^2 - \beta^2} \right) + \tfrac{1}{4} l \frac{\alpha^2 + \beta^2 + 2\beta + 1}{\alpha^2 + \beta^2 - 2\beta + 1}$$

esse, atque revera Arc ($\operatorname{tg} = \alpha + \beta i$) sub forma postulata exhiberi.

Haec est transformatio functionum transcendentium inferiorum, quas omnes in formam $m + ni$ reductas esse, quum quantitas variabilis determinans $= \alpha + \beta i$ posita sit, videmus. — Insignes inter illas functiones relationes illa transformatione inveniuntur, adeo novae proprietates quarundam functionum nonnisi formulis imaginariis adhibitis reperiri possunt, ut logarithmum innumeros habere valores.

Non difficile videtur intellectu, omnes functiones, illis simplicibus, quas proposuimus compositas, eadem ratione discerpi posse, quum quantitas determinans imaginariam induerit formam. — Nonnisi repetitio singularum calculi imaginarii specierum se praebebit.

Generalis vero demonstratio, quamlibet functionem $f(x)$, quum x imaginarium factum sit, ita transformari

posse ut $f(x) = \varphi(x) + i\psi(x)$, ubi $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ reales functiones x sint, non nota est. Ceterum vix umquam demonstrabitur ejusmodi theorema, nam quum eam demonstrationem omnino ad formam pertinere supra viderimus, ante omnia formam generalem functionis cujuslibet quantitatis x proponi necesse foret. — Functioees, quae ex theoremate Tayloriano vel Maclauriniano in series, secundum potestates x progredientes, evolvere licet, quum fiant imaginariae, his seriebus in formam $m + ni$ redigi possunt; tamen series m et n convergere, vel ad limitem certum quendam finitum appropinquare, demonstrandum foret.

Jam supra docuimus, qua ratione ab imaginariis formulis ad reales transire liceat. Quum inter quaslibet functiones aequatio data sit $f(x) = f'(x)$, et quum $x = \alpha + \beta i$ ponatur, ex praecedentibus elucet, quomodo $f(x)$ et $f'(x)$ ita discerpantur, ut $f(x) = \varphi(x) + i\psi(x)$, $f'(x) = \varphi'(x) + i\psi'(x)$; aequationem, quam inde oriri videmus $\varphi(x) + i\psi(x) = \varphi'(x) + i\psi'(x)$ non nisi compositionem harum esse constat:

$$\varphi(x) = \varphi'(x); \quad \psi(x) = \psi'(x),$$

et quod ex aequatione imaginaria uno tantum modo duae reales derivari possint, hunc transitum, qui fit ab imaginaria aequatione ad reales, omnino determinatum et definitum esse, dilucide apparet.

Leges igitur atque conditiones, secundum quas de recta ratione calculi imaginarii instituendi judicetur, ex natura formularum imaginariarum derivavimus atque satis exposuisse nobis videmur.

Afferenda etiam nobis sunt quaedam in parte altera significata. Diximus enim simplicissimam formam imaginariam esse $\sqrt{-x}$ vel $z\sqrt{-1}$, eaque omnes alias, quas invenimus functiones imaginarias exprimi posse.

Notum esse $e^x = z$ functionem omnino non negativum valorem induere, quamdiu x realis quantitas maneat;

itaque quum z negativum statuamus, valorem $-z$ non ex reali valore x sed imaginario $x = \alpha + \beta i$ deducemus. Ponamus $e^{\alpha+\beta i} = -z$, vel $\alpha + \beta i = l(-z)$ verum qnum $l(-z) = l(z) + l(-1)$ nonnisi $e^{\alpha+\beta i} = -1$, $\alpha + \beta i = l(-1)$ poni necesse est. — $e^{\alpha+\beta i} = e^{\alpha} . e^{\beta i} = e^{\alpha}\{\cos\beta + i\sin\beta\} = -1$, unde sequitur $e^{\alpha} = 1$, $a = o$, quod modulus e^{α} tantum positiva quantitas est,

$\cos\beta = -1$, $\sin\beta = o$, unde $\beta = (2\varkappa+1)\pi$; $l(-1)$

$$= (2\varkappa+1)\pi i;\ l(-z) = l(z) + (2\varkappa+1)\pi i,$$

qua aequatione logarithmus numeri negativi in simpliciorem formam functionis imaginariae $\sqrt{-x}$, reductus videatur. — Respiciendi vero sunt innumeri valores talis logarithmi numeri negativi.

Paucis verbis functionem imaginariam Arc $(\sin = z > 1)$ sub forma $m + ni$ exhiberi posse elucebit; nam

quum Arc $(\sin = z) = \text{Arc}\left(\text{tg} = \frac{z}{\sqrt{1-z^2}}\right)$ atque $z > 1$

ponatur, $\sqrt{1-z^2}$ imaginaria fit, et fratio $\frac{z}{\sqrt{1-z^2}}$ ita

transformari potest, ut $= \varphi(z) + i\psi(z)$ vel $= \alpha + \beta i$ sit; ergo

$$\text{Arc}\,(\sin = z > 1) = \text{Arc}\,(\text{tg} = (\alpha + \beta i) = m + ni.$$

$$\text{Functio Arc}(\cos = z > 1),\ \text{quia} = \text{Arc}\left(\text{tg} = \frac{\sqrt{1-z^2}}{z}\right)$$

plane ejusdem generis est.

Arc $(\sec = x < 1)$, Arc $(\text{cosec} = x < 1)$ functiones imaginariae eodem modo in formam $m + ni$ redigi posse, hac aequatione perspicitur:

$$\text{Arc}\,(\sec = x) = \text{Arc}\left(\cos = \frac{1}{x}\right)$$

$$\text{Arc}\,(\text{cosec} = x) = \text{Arc}\left(\sin = \frac{1}{x}\right)$$; jam quum $x < 1$,

$\frac{1}{x} > 1$ fiat, hae functiones formulis Arc $(\sin = z > 1)$, Arc $(\cos = z > 1)$ exprimuntur.

Itaque revera illas functiones simplices, quae pro realibus valoribus quantitatis regentis imaginariae fiant, in unam formam $m + ni$ imaginariam reduximus.

SENTENTIAE CONTROVERSAE.

---

1. In physicis non ipsa phaenomena, sed quae intercedant inter ea rationes explicantur.
2. Argumenta in physicis solis experimentis suppeditantur.
3. Spatii et temporis notiones non usu atque experientia animo concipiuntur, sed a natura nobis infixae sunt.
4. Quaevis argumentatio nihil aliud nisi logica ratione peracta explicatio.

VITA.

Natus sum ***Henricus Hermanus Finger*** a. d. XIII. Cal. Oct. a. MDCCCXXI, fidei catholicae addictus, patre ***Henrico***, vectigalium coactore, matre ***Elisabetha*** e gente ***Tuschiana***, Suidniciae. Primis literarum elementis imbutus sum in schola vici Altwasser, ubi parentes mei ab anno MDCCCXXVI habitabant, deinde scholam Waldenburgensem adii, quam usque ad annum MDCCCXXXIIII frequentavi. Eo anno in gymnasium regium catholicorum Vratislaviense receptus sum, quod eo tempore sub auspiciis viri doctissimi ***Elvenich***, directoris et professoris publici philosophiae in universitate literarum, postea sub auspiciis viri clarissimi Wissowa, directoris et professoris regii vigebat. — Praeceptores ibi mihi fuerunt ante omnes benevoli et amici, ***Brettner***, ***Stenzel***, ***Stinner***, ***Kruhl***, ***Janske***, quibus gratiam semper maximam habebo.

Anno MDCCCXL, testimonio maturitatis accepto, a Viro Ill. ***Gaupp***, t. t. Rectore Magnifico a. d. VI. Cal. Nov. inter cives academicos rite receptus, apud theologos catholicos

Decano V. ill. *Ritter* nomen dedi. Per unum deinde semestre interfui lectionibus theologicis virorum summe venerandorum DD. *Movers*, *Baltzer*, *Ritter*, *Demme.*

Sed amore matheseos, quo jam in gymnasio affectus et inflammatus eram, ductus, semestri hiemali peracto, a. MDCCCXLI. a. d. IV. non. Maj. ad ordinem philosophorum transiens, V. Ill. *Weber*, t. t. philosophorum Decano, nomen dedi. — Inde tres annos scholis interfui mathematicis Virorum Cll. DD. *Scholtz*, *Kummer*, *Rosenhayn*, *Frankenheim*; physicis VV. Cl. DD. *Pohl*, *Nees ab Esenbeck*, *Glocker*; chemicis, *Müller*, *Duflos*; philosophicis VV. Cl. DD. *Elvenich*, *Rohovsky*, *Braniss*; philologicis VV. Cl. DD. *Haase*, *Ambrosch.* Historiam me docuerunt VV. Cl. DD. *Stenzel*, *Kutzen*, *Roepell*; literas germanicas *Freitag*, *Kahlert*; linguam francogallicam V. Cl. *Rüdiger*, anglicam V. Cl. *Behnsch.* Praeterea interfui juridicis lectionibus VV. Cl. DD. *Abegg*, *Wilda.*

Quibus omnibus viris doctissimis, de eruditione mea optime meritis, gratias jam ago quam maximas, semperque iis animum pium gratumque praebebo.